Пловдивски университет „Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика
Катедра “Приложна математика и моделиране”

“Компютърни числени методи”
ЛЕКЦИЯ 5

Проф. д-р Снежана Гочева-Илиева, snow@uni-plovdiv.bg

Он-лайн обучение: www.fmi-plovdiv.org/evlm
www.fmi-plovdiv.org/evlm/DBbg - числени методи

Литература:

1. Бояджиев Д., Гочева С., Макрелов И., Попова Л. – Ръководство по числени методи – част 1, Издания: 2003, 2006, 2010.
2. Семерджиев Х., Боянов Б., Числени методи, ПУ.
3. Гочева-Илиева С., Въведение в система Mathematica, ЕксПрес, Габрово, 2009.

Съдържание

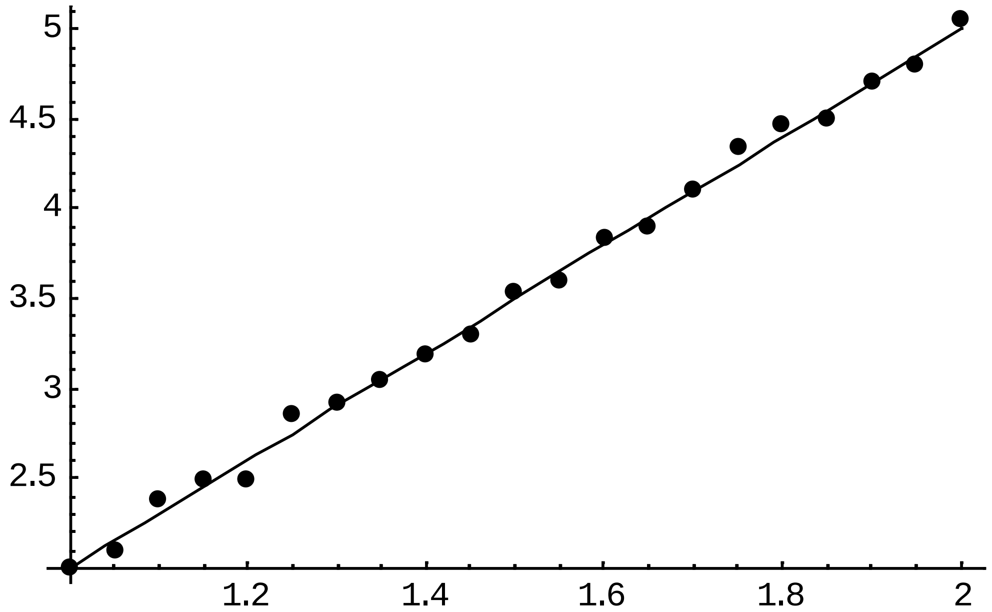
Интерполационен полином на Лагранж

Крайни разлики. Интерполационен полином на Нютон

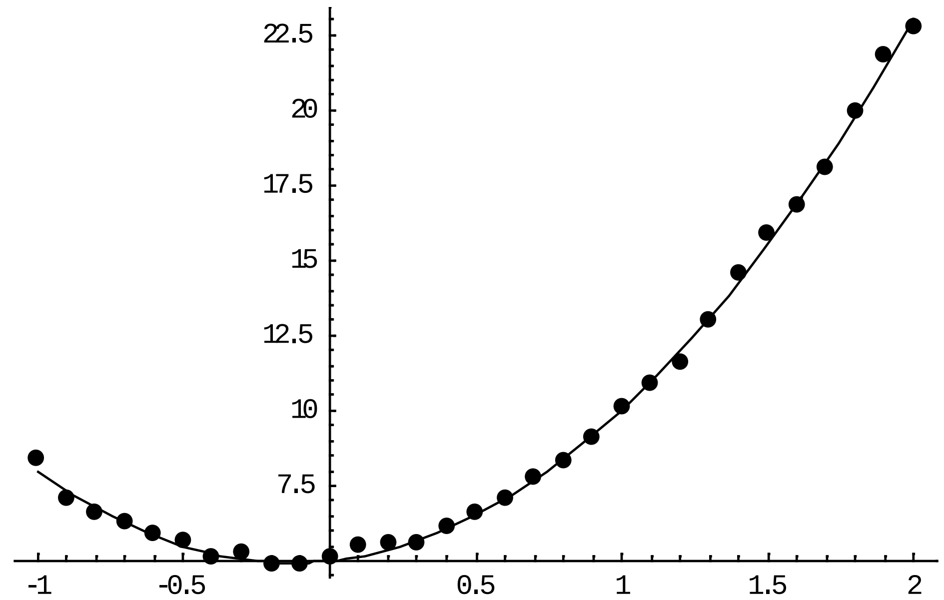
1. Основни етапи при приближаване на функции, зададени в таблична форма

Приближаването на функции може да се нарече “получаване на нещо, вместо нищо”. В общия случай функцията е известна в дискретно (крайно) множество от точки и търсим нейна стойност в някаква друга точка. Естествено, ние не я знаем. Затова стандартният подход при приближаване на финкции е:

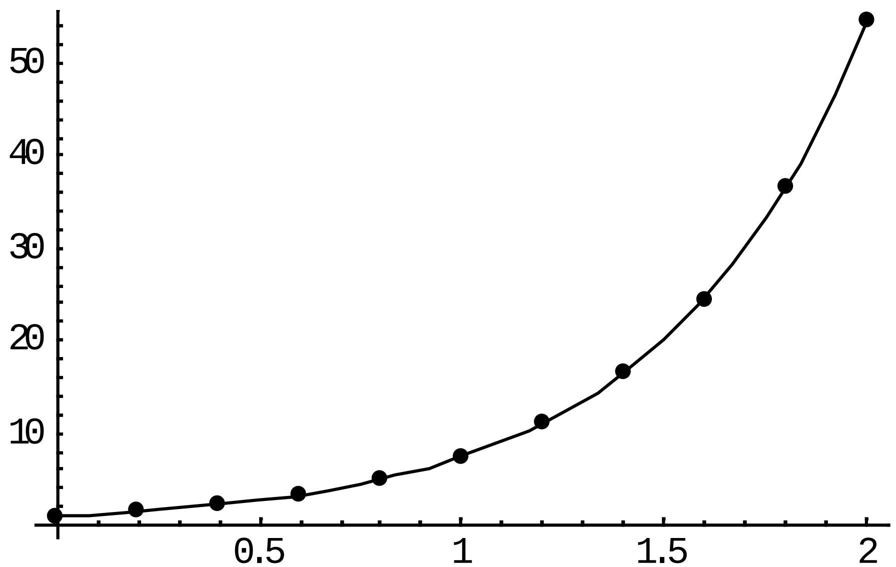
1. Начертаваме графиката на функцията по известните точки $(x_i, y_i),\ i = 0,1,\dots,n$.
2. Опитваме се да “познаем” вида (класа) на търсената функция по графиката; тя може да прилича, например на: полином от някаква степен (права линия – полином от 1ва степен, парабола – полином от 2ра степен и т.н.), тригонометрична функция, експоненциална, логаритмична и т.н. Примери:



$y \approx ax + b$



$y \approx ax^2 + bx + c$



$y \approx e^{\lambda x}$

3. Според броя на точките и класа на функцията и други характеристики на приближаваната функция използваме различен метод за нейното приближаване.
4. Получаваме някаква формула, “близка” до данните.
5. Използваме получената приближаваща формула, за да пресметнем стойности на функцията в точки, в които не разполагаме с данни.

Методи за приближаване:
Интерполиране,
метод на най-малките квадрати,
интерполиране със сплайни и др.

2. Задача на интерполирането

Постановка на задачата. Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в някакъв интервал и е известна таблица от стойностите ѝ

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

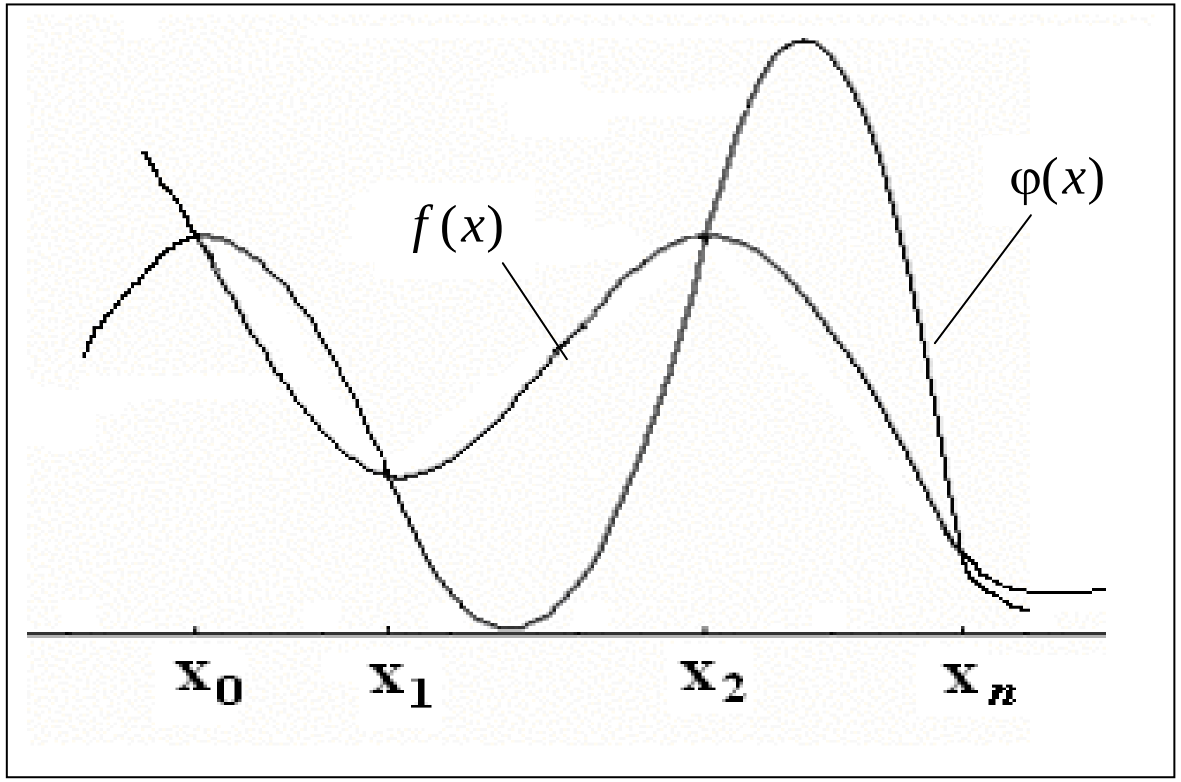
Търси се приближаваща фунция $\varphi(x)$, такава че

$$\varphi(x_i) = y_i,\ \ i = 0,1,\dots,n. \qquad (1)$$

Тази задача се решава при задаване класа на функциите $\varphi(x)$.

Определение. Точките $x_0, x_1, \dots, x_n$ се наричат възли на интерполирането.

Графично условието (1) означава, че приближаващата функция $\varphi(x)$ минава през точките (x_i, y_i), тъй като има в x_i същите стойности като $f(x)$ - виж следващата фиг.



Примери.

1) Ако изберем системата от функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ и разгледаме всички линейни комбинации по тази система, ще получим класа на полиномите от n-та степен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$. Интерполационният полином ще се определя от условието

$$P_n(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

2) Ако изберем системата функции

$$\frac{1}{2}, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots$$

ще получим класа на тригонометричните полиноми от n-та степен $T_n(x) = a_0 + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + \ldots + a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ и т.н.

Според вида на всяка конкретна функция $f(x)$ най-напред се определя класа приближаващи функции, а след това и съответната интерполираща функция (полином) $\varphi(x)$ по условието (1).

3. Интерполационен полином на Лагранж

Дадена е таблицата със стойности на функцията $y = f(x)$:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Търси се приближаваща функция във вид на полином

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, така че

$$P_n(x_i) = y_i, \; i = 0,1,\ldots,n. \qquad (2)$$

Без ограничение по-нататък ще считаме, че възлите са подредени във възходящ ред, т.е. $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Съществуването на такъв полином се осигурява със следния интерполационен полином на Лагранж, който има вида:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i F_i(x), \qquad (3)$$

където $F_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ са коефициентите на Лагранж. Те имат свойството: $F_i(x_i)=1$, $F_i(x_j)=0,\ j\neq i$.

Формулата става: $$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \tag{4}$$

Формулата (3) или (4) се записва подробно така:

$$\boxed{\begin{aligned}L_n(x)&=y_0\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}+\ldots\\ &+y_k\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}+\ldots+y_n\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})}\end{aligned}} \tag{5}$$

Очевидно този полином удовлетворява условията (2). Проверка:
При $x = x_0$,

$$L_n(x_0) = y_0 \frac{(x_0 - x_1)...(x_0 - x_n)}{(x_0 - x_1)...(x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)} + ...$$

$$+ y_n \frac{(x_0 - x_0)...(x_0 - x_{n-1})}{(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1})} = y_0.1 + 0 + ... + 0 = y_0 \quad .$$

При $x = x_1$,

$$L_n(x_1) = y_0 \frac{(x_1 - x_1)...(x_1 - x_n)}{(x_0 - x_1)...(x_0 - x_n)} + y_1 \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_0 - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)} + ...$$

$$+ y_n \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)...(x_1 - x_{n-1})}{(x_n - x_0)...(x_n - x_{n-1})} = y_0.0 + y_1.1 + ... + 0 = y_1$$

и т.н. за всички възли x_i.

В сила е следната

4. Теорема за съществуване и единственост на интерполационния полином

Ако всички интерполационни възли са различни, т.е. $x_i \neq x_j,\ i \neq j$, то интерполационният полином на Лагранж е единствен.

Доказателство. Съществуването бе показано по-горе с проверката на условията за интерполиране. Но твърдението може да се докаже и независимо от този факт.

Заместваме всеки от възлите в условията (2):

$$
\begin{aligned}
x = x_0 :&\quad P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
x = x_1 :&\quad P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x = x_n :&\quad P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{aligned}
\quad . \qquad (6)
$$

Тук коефициентите на полинома са n+1 неизвестни $a_0, a_{1,\dots,} a_n$.

От линейната алгебра е известно, че необходимото и достатъчно условие за съществуване и единственост на решение на линейната система с ненулева дясна част (което е общия за нас случай) е детерминантата на системата да е различна от нула. Така получаваме следната детерминанта, известна като детерминанта на Вандермонд

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j,\, j=0}^{n} (x_i - x_j) \neq 0 .$$

Очевидно, когато всички възли са ралични,т.е. $x_i \neq x_j,\ i \neq j$, стойността на тази детерминанта е различна от нула, с което теоремата е доказана.

Без доказателство ще приведем следната

5. Теорема за оценка на грешката от интерполиране

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a,b]$ и освен това съществуват и са непрекъснати в $[a,b]$ и производните ѝ до n+1-ви ред: $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$. Нека по стойностите на функцията във възлите $x_0 < x_1 < \dots < x_n,\ x_i \in [a,b]$ е построен интерполационният полином на Лагранж. Тогава за всяка точка x от дефиниционната област е в сила следната оценка за грешката в тази точка:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \quad \xi \in (a,b) \tag{7}$$

или като оценка на абсолютната грешка:

$$\left| f(x) - L_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|, \quad M_{n+1} = \max_{[a,b]}\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \tag{8}$$

6. Особености при интерполиране с алгебрични полиноми

1. От оценката на грешката (7)-(8) лесно се съобразява, че грешката е малка, когато възлите са близко един до друг, така, че произведението $\left|(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\right|$ да бъде число близко до нула.
2. По същите съображения е добре така да избираме възлите, че точката x, в която търсим стойност да бъде по възможност между възлите на интерполиране. Когато x е извън интервала на възлите, казваме, че се прави екстраполиране. В някои случаи е възможна само екстраполация, но грешката е по-голяма.
3. Теоретично е доказано, че при степен $n > 6$ интерполационният полином обикновено все по-силно скача около функцията. Затова се интерполира с неголеми n.

Пример. Дадена е следната таблица на фунцията $y = f(x) = \sqrt{x+3}$:

x_i	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y_i	2.	2.049	2.098	2.145	2.191	2.236

Да се намери приближена стойност в точката x’=1.65 с полином на Лагранж от втора степен и да се оцени грешката .

Решение. За да построим полинома от 2-ра степен (n=2) са необходими 3 възела. Съгласно горните забележки, като знаем, че x’=1.65, да изберем възли на интерполирането $x_0 = 1.6, x_1 = 1.8, x_2 = 2$, така че x’ да е вътре в интервала $[1.6, 2]$. Това ще намали грешката. Формулата на полинома от 2-ра степен, съгласно (5) е:

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Като заместим x' приближената стойност е:

$$L_2(x') = y_0 \frac{(x'-x_1)(x'-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x'-x_0)(x'-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x'-x_0)(x'-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Заместваме тук нашите данни и получаваме:

$$L_2(1.65) = 2.145\frac{(1.65-1.8)(1.65-2)}{(1.6-1.8)(1.6-2)} + 2.191\frac{(1.65-1.6)(1.65-2)}{(1.8-1.6)(1.8-2)} + 2.236\frac{(1.65-1.6)(1.65-1.8)}{(2-1.6)(2-1.8)}$$

$$L_2(1.65) = 2.145\frac{(-0.15)(-0.35)}{(-0.2)(-0.4)} + 2.191\frac{(0.05)(-0.35)}{(0.2)(-0.2)} + 2.236\frac{(0.05)(-0.15)}{(0.4)(0.2)}$$

$$L_2(1.65) = 2.145 * 0.6562 + 2.191 * 0.4375 + 2.236 * (-0.09375) \approx 2.15659.$$

Нашите данни са с 3 знака след десетичната точка (неотстранима грешка = 0.001), затова закръгляме засега резултата на 2.157.

Код на *Mathematica* за изчисляване по формулата (5):

```
f[x_] := √(x + 3); h = 0.2; (* дефинираме функцията *)
x =.;
xi = Table[x, {x, 1., 2., h}]
y = Table[f[x], {x, 1., 2., h}]
  1.65
  {1., 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.}
  {2., 2.04939, 2.09762, 2.14476, 2.19089, 2.23607}
```

```
x =.;

xx = 1.65;  (* xx е точката, в която ще търсим приближението*)
xi = {1.6, 1.8, 2.};   y = { 2.145, 2.191,  2.236};
(* Подбор на възлите на интерполиране *)
```

$$L2[x\_] = y[[1]]\,\frac{(x - xi[[2]]) * (x - xi[[3]])}{(xi[[1]] - xi[[2]]) * (xi[[1]] - xi[[3]])} +$$

$$y[[2]]\,\frac{(x - xi[[1]]) * (x - xi[[3]])}{(xi[[2]] - xi[[1]]) * (xi[[2]] - xi[[3]])} +$$

$$y[[3]]\,\frac{(x - xi[[2]]) * (x - xi[[1]])}{(xi[[3]] - xi[[2]]) * (xi[[3]] - xi[[1]])};$$

```
Expand[%]  (* Получаване развит полинома на Лагранж *)
 Print["Приближена стойност L2(xx) = ",  L2[xx]  ]
  Print["Точна стойност=  f[xx]=",  f[xx]]
```

$$1.741 + 0.2725\,x - 0.0125\,x^2$$

Приближена стойност L2(xx) = 2.15659

Точна стойност= f[xx]=2.15639

```
(* Проверка за правилност на получения полином *)
L2[1.6]
L2[1.8]
L2[2]
```

2.145

2.191

2.236

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

Наистина като заместим 1.6, 1.8, 2 получаваме точно първоначалните данни от таблицата на функцията. Значи това е търсеният полином на Лагранж.

<u>**Оценка на грешката:**</u> **В случая полиномът е от 2-ра степен, затова по формула (8) п**ресмятаме третата производна и правим графика на третата производна, за да видим къде е максимумът по абсолютна стойност:

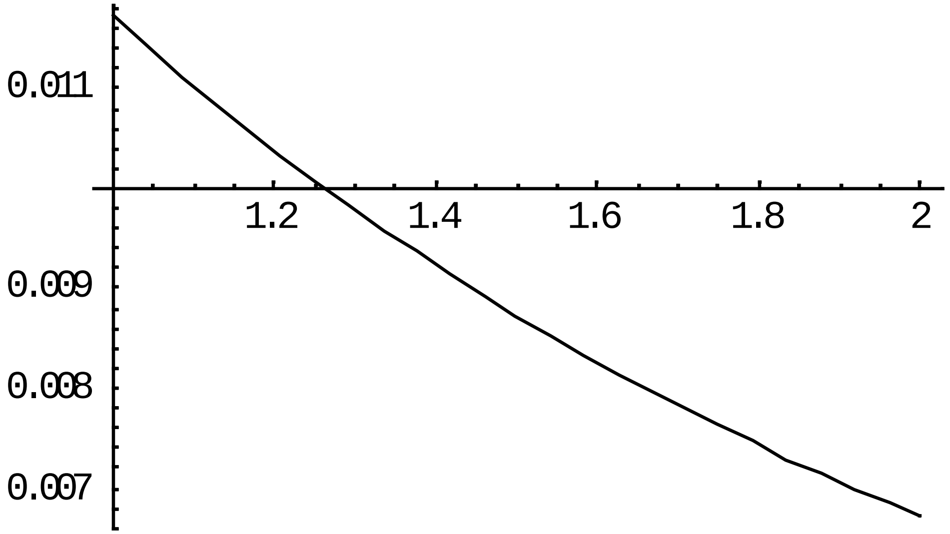
$\partial_{x,x,x} f[x]$ (* Пресмятаме третата производна *)

$$\frac{3}{8\,(3+x)^{5/2}}$$

```
f3[x_] := Abs[3/(8 (3 + x)^(5/2))]
```

$$f3[x\_] := \mathrm{Abs}\left[\frac{3}{8\,(3+x)^{5/2}}\right]$$

```
(* дефинираме абс. стойност на третата производна
   – (тази формула се копира от по–горе) *)
Plot[f3[x], {x, 1, 2}]
(* Правим графика на третата производна,
за да видим max*)
```




```
m3 = f3[1.];
Print["Max на третата производна в случая е при x=1: M3= ", m3]
```

$$gr = m3 * \frac{\text{Abs}[\,(xx - 1.6) * (xx - 1.8) * (xx - 2)]}{3\,!};$$

```
Print[" Теоретична грешка= ", gr]
```

Max на третата производна в случая е при x=1: M3= 0.0117188

Теоретична грешка= 5.12695×10^{-6}

Получихме теоретична грешка на метода от порядъка 0.0000052. Но тъй като неотстранимата ни грешка беше ε= 0.001, то се взима по-лошата грешка, т.е. 0.001. Така крайният резултат на приближената стойност с интерполационния полином на Лагранж е вярна само с три знака, или:

$f(1.65) = \sqrt{1.65+3} \approx 2.157$. Като сравним с точната стойност, която в случая знаем и е 2.15639, виждаме, че това отговаря на истината.

Освен това, като прегледаме първоначалните данни виждаме, че точката x'=1.65 е между точките 1.6 и 1.8, в които стойностите на функцията са съответно :

за 1.6 → 2.145, за 1.8 → 2.191,

а ние получихме приближено за 1.65→ 2.157, т.е. между тях. Което прилича на истина, дори и да не знаехме точната стойност! Това е един от критериите за правилност на резултата в общия случай.

В този пример успяхме да намерим грешката, като използвахме формула (8). В реалния случай обаче, формула на функцията не е известна, а само нейни значения в определен брой точки. Дори обикновено не се знае дали съществуват някакви производни и до какъв ред. Затова теоретичното оценяване на грешката има ограничено приложение и е съществено при прилагане на формулите, избор на точките на интерполиране и др. (Виж особености при интерполирането по-горе).

За упражнение:

1. Решете същата задача с полином от 3-та степен.

2. Постройте полином от 2-та степен с възли 1.4, 1.6, 1.8 и намерете стойността в същата точка 1.65.

7. Крайни разлики. Таблица на крайните разлики

Нека интерполационните възли $x_0, x_1, \dots, x_n$ са равноотдалечени със стъпка $h > 0$, т.е. $\boxed{x_k = x_0 + kh,\ k = 0,1,\dots,n}$. И нека е дадена таблицата от стойности на функцията $y = f(x)$:

x_i	x_0	$x_1 = x_0 + h$	…	$x_n = x_0 + nh$
y_i	y_0	y_1	…	y_n

Определение 1. Крайни разлики от първи ред наричаме:

- в x_0: $\Delta_0 = y_1 - y_0$; в x_1: $\Delta_1 = y_2 - y_1$, …, в x_{n-1}: $\Delta_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ или в общия случай: x_i: $\Delta_i = y_{i+1} - y_i$, $i = 0,1,\dots,n-1$.

Определение 2. Крайни разлики от втори ред наричаме:

- в x_0: $\Delta_0^2 = \Delta_1 - \Delta_0$; в x_1: $\Delta_1^2 = \Delta_2 - \Delta_1$, …, в x_{n-2}: $\Delta_{n-2}^2 = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ или в общия случай: x_i: $\Delta_i^2 = \Delta_{i+1} - \Delta_i$, $i = 0,1,\dots,n-2$.

Определение 3. Крайни разлики от *k*-ти ред наричаме числата:

$$\Delta_i^k = \Delta_{i+1}^{k-1} - \Delta_i^{k-1}, \quad i = 0,1,\dots,n-k, \quad k = 1,\dots,n. \tag{11}$$

Получаваме следната триъгълна таблица на крайните разлики:

i	x_i	y_i	Δ_i	Δ_i^2		Δ_i^{n-1}	Δ_i^n
0	x_0	y_0	Δ_0	Δ_0^2		Δ_0^{n-1}	Δ_0^n
1	x_1	y_1	Δ_1	Δ_1^2		Δ_1^{n-1}	
2	x_2	y_2	Δ_2	Δ_2^2			
…							
n-2	x_{n-2}	y_{n-2}	Δ_{n-2}	Δ_{n-2}^2			
n-1	x_{n-1}	y_{n-1}	Δ_{n-1}				
n	x_n	y_n					

Пример. Да се състави таблицата на кр. р. по стойностите на функцията $y = e^x$:

x_i	3.60	3.65	3.70	3.75	3.80
y_i	36.598	38.475	40.447	42.521	44.701

(*)

Определяме $h = 0.05$, равномерна стъпка – можем да ползваме кр.р. Таблицата е:

i	x_i	y_i	Δ_i	Δ_i^2	Δ_i^3	Δ_i^4
0	3.60	36.598	1.877	0.095	0.007	-0.003
1	3.65	38.475	1.972	0.102	0.004	
2	3.70	40.447	2.074	0.106		
3	3.75	42.521	2.180			
4	3.80	44.701				

Забелязваме, че крайните разлики намаляват по стойност.

8. Свойства на крайните разлики

Апаратът на кр.р. е добре изследван, тъй като той се използва в един от най-разпространените методи за числено решаване на диференциални задачи – метод на кр.р. или диференчните схеми.

Тук ще приведем само две техни основни свойства:

1) <u>Формула за изразяване на кр.р. със стойностите на функцията:</u>

$$\Delta_i^2 = \Delta_{i+1} - \Delta_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \,,$$

$$\Delta_i^3 = \Delta_{i+1}^2 - \Delta_i^2 = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \,,$$

т.е. с участието на коефициентите на нютоновия бином, или

$$\Delta_i^k = \Delta_{i+1}^{k-1} - \Delta_i^{k-1} = y_{i+k} - \frac{k}{1!} y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} y_{i+k-3} + \ldots + (-1)^k y_i \quad (12)$$

2) Приближение на производните с кр.р.:

От определението на производна имаме:

$$y'(x_i) = \lim_{h\to 0}\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_i}{h} \approx \frac{\Delta_i}{h}, \quad y''(x_i) = \lim_{h\to 0}\frac{y'_{i+1}-y'_i}{h} \approx \frac{\Delta_{i+1}-\Delta_i}{h.h} \approx \frac{\Delta_i^2}{h^2}, \ \dots$$

В общия случай, ако съществуват производните:

$$y^{(k)}(x_i) \approx \frac{\Delta_i^k}{h^k}. \tag{13}$$

Разпространение на грешката в таблицата на крайните разлики

Нека допуснем, че има някаква допусната грешка ε (от закръгляне, от входни данни и др.). Съгласно свойство 1) грешката ще се рапространява с множители - коефициентите на Нютоновия бином. Директно по примерна таблица с изчисляване на кр.р. се показва разрастването на грешката с реда на кр.р.

i	x_i	y_i	Δ_i	Δ_i^2	Δ_i^3	Δ_i^4	Δ_i^5	Δ_i^6
0	x_0	0	0	0	ε	-4ε	10ε	-20ε
1	x_1	0	0	ε	-3ε	6ε	-10ε	
2	x_2	0	ε	-2ε	3ε	-4ε		
3	x_3	ε	-ε	ε	-ε			
4	x_4	0	0	0				
5	x_5	0	0					
6	x_6	0						

Освен това при близки стойности на функцията и относителната грешка от изваждането е неустойчива (виж Лекция 1 – пример за неустойчивост на относителната грешка).

Извод. Да се избягва ползването на кр.р. от висок ред!

9. Интерполационен полином на Нютон. Формули на Нютон за интерполиране напред и назад

Както знаем интерполационният полином на Лагранж е единствен. Но неговият вид не е много ефективен за пресмятане, особено многократно. Затова в някои случаи е по-удобно да използваме друг вид на полинома. Съществуват много еквивалентни представяния – формили на Нютон, Ейткин, Гаус...

Постановка. Нека възлите на интерполиране са равноотдалечени със стъпка $h>0$, т.е. $x_k = x_0 + kh,\ k = 0,1,\dots,n$. И нека е дадена таблицата от стойности на функцията $y = f(x)$:

x_i	x_0	$x_1 = x_0 + h$	...	$x_n = x_0 + nh$
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Търсим интерполационния полином на Нютон във вида:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}), \qquad (14)$$

за който $P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n$. (15)

<u>Извод на полинома на Нютон за интерполиране напред</u>

Заместваме $x = x_0$ в (14) и от условие (15) веднага получаваме

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) + \ldots + a_n(x_0 - x_0)\ldots = a_0 = y_0 \rightarrow \boxed{a_0 = y_0}.$$

При $x = x_1$ аналогично

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) + \ldots = y_0 + a_1 h = y_1 \rightarrow \boxed{a_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{\Delta_0}{h}}$$

По-нататък (по принципа на непълната математическа индукция) намираме за $x = x_k$, че $\boxed{a_k = \dfrac{\Delta_0^k}{k!h^k}}$, $k = 0,1,\ldots,n$. Или

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta_0^2}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta_0^n}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Накрая полагаме тук $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ и след елементарни преобразования получаваме формула на Нютон за интерполиране напред

$$\boxed{P_n(t) = y_0 + t\Delta_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta_0^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta_0^3 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta_0^n, \quad t = \frac{x-x_0}{h}} \qquad (16)$$

Тази формула се нарича формула на Нютон за интерполиране напред, защото в нея участват само кр.р. в точката x_0 - в случая това са стойностите на кр.р. от първия ред на таблицата, а именно y_0, Δ_0, Δ_0^2 и т.н.

Аналогично, ако търсим формулата във вида

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-x_n) + b_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots + b_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)$$

се получава формула на Нютон за интерполиране назад:

$$\boxed{P_n(t) = y_n + t\Delta_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta_{n-2}^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\Delta_{n-3}^3 \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta_0^n, t = \frac{x-x_n}{h}} \qquad (17)$$

Оценка на грешката във формулата на Лагранж

Като се използват равноотдалечени възли, грешката е:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n) \qquad (18)$$

10. Преимущества на формулите на Нютон

- Очевидно формулите на Нютон (16) или (17) изискват по-малък брой аритметични действия от формулата на Лагранж
- За (16) ако x е близо до x_0, то t е малко. За достатъчно гладка функция и кр.р. намаляват, така че обикновено от формулата се пресмятат само няколко събираеми, а останалите се отхвърлят, щом станат по-малки по модул от зададената точност ε. Следователно сметките са реално още по-малко.
- Аналогично (17) е удобна, когато x е близо до x_n.
- Ако x е близо до някое друго x_j от таблицата, то правим преномерация с начало (или край) x_j и избираме (16) или (17).

Пример. Да се намери приближена стойност на $e^{3.62}$ с точност ε=0.001 по таблица (*), за която изчислихме таблицата на кр.р.:

i	x_i	y_i	Δ_i	Δ_i^2	Δ_i^3	Δ_i^4
0	3.60	36.598	1.877	0.095	0.007	-0.003
1	3.65	38.475	1.972	0.102	0.004	
2	3.70	40.447	2.074	0.106		
3	3.75	42.521	2.180			
4	3.80	44.701				

Решение: Очевидно x=3.62 се намира най-близо до x_0, h=0.05 и е удобна формулата на Нютон напред. Трябва да използваме кр.р. от първия ред – подчертани с права черта.

Изчисляваме $t = \dfrac{x - x_0}{h} = \dfrac{3.62 - 3.60}{0.05} = 0.4$. Тогава от (16):

$$P_n(t) = y_0 + t\Delta_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta_0^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta_0^3 + \ldots$$

$$= 36.598 + 0.4(1.877) + \frac{0.4(-0.6)}{2!}0.095 + \frac{0.4(-0.6)(-1.6)}{3!}0.007 + \ldots =$$

$$= 36.598 + 0.7508 - 0.0114 + 0.000448 \approx 37.3374 \approx 37.337 \quad ,$$

Виждаме, че добавянето на четвъртия член 0.000448 не влияе, защото е по-малък от ε=0.001. Затова прекъсваме изчисленията дефакто след намирането на третия член. Закръгленият резултат според даденото ε е

$$f(x) = e^{3.62} \approx P_2(3.62) \approx 37.337 \, . \qquad (19)$$

Забележка. С прекъсването по точност освен това определяме и каква степен има приближаващият полином, в случая n=2.

Пример. Оценете грешката на приближението за предния пример
Решение: а) Неотстранима грешка – данните са с три знака след десетичната точка, т.е. 0.001.

б) Грешка на метода. Пресмятаме производните $f' = f'' = f''' = e^x$. Тъй като $f(x) = e^x$ е растяща за всяко x, то очевидно $\left| f'''(\xi) \right| \le \max\limits_{[3.6, 3.8]} \left| e^x \right| = e^{3.8} \le 45$ (от таблицата с данни). От формула (18) $R_n(x) = h^{n+1} \dfrac{t(t-1)\ldots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ при за n=2 оценяваме абсолютната грешка на приближението по метода на Нютон с кр.р.:

$$\left| R_n(x = 3.62) \right| = 0.05^3 \frac{0.4(-0.6)(-1.6)}{3!} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \le 0.000125 . \frac{0.384}{3!} .45 = 0.00036 \approx 0.0005 .$$

Заключение. От а) и б) следва, че грешката на приближението е 0.001. Следователно всички знаци в (19) са верни, т.е. $e^{3.62} \approx 37.337$.

Домашно. Намерете приближено а) $e^{3.77}$ и б) $e^{3.67}$.

Упътване. а) Използвайте формулата Нютон назад (17) и почертаните с къдрава линия последни по стълбовете кр.р.

б) Преномерирайте възлите с начало $x_0 = 3.65$ и игнорирайте първия ред. След това приложете формулата Нютон напред, в която ще участват горните кр.р. от втория ред на таблицата.